0.1 Quillen 同値

二つのモデル圏の間の関係として Quillen 同値というものがある。ホモトピー圏や導来関手のところでの議論を思い出せば、Quillen 同値は Derived functor によりホモトピー圏の間の equivalence of category を誘導する。まずは Quillen functor を定義する。この定義は同値な条件が数多く存在するので、どれを定義にするか迷うところであるがとりあえず、もっとも強い条件を定義にしておく。後で見るようにこの条件のうち半分ほどはいらないのである。

Definition 0.1.1 *Quillen adjoint*

M, N をモデル圏とするとき、adjoint functors

$$F : M \Longleftrightarrow N : G$$

において (F, G) が Quillen functors であるとは、

1. F は cofibration と acyclic cofibration を保つ。
2. G は fibration と acyclic fibration を保つ。

という 2 つの条件が成り立つときの事をさす。このときさらに、任意の C における cofibrant object の A と、D における fibrant object の X に対し、

$$f : A \longrightarrow G(X) \text{ が } M \text{ の weak equivalence} \Longleftrightarrow f^\flat : F(A) \longrightarrow X \text{ が } N \text{ の weak equivalence}$$

となるとき、Quillen 同値という。

Proposition 0.1.2

$F : M \Longleftrightarrow N : G$ を model category の間の adjoint functors とする。このとき、次の条件は同値である。

1. (F, G) は Quillen functors
2. F は cofibration と acyclic cofibration を保つ
3. G は fibration と acyclic fibration を保つ。
4. F は cofibration を保ち、G は fibration を保つ。
5. F は acyclic cofibration を保ち、G は acyclic fibration を保つ。

6. F は all acyclic cofibration と cofibrant object 間の cofibration を保つ。

7. G は all acyclic fibration と fibrant object 間の fibration を保つ。

proof)　1 の条件が一番強い事はすぐにわかる。つまり、1 ならば、他の条件はすべて満たしている。というわけで、おのおの逆を考えてみればよい。2 を仮定する。このとき、G が fibration と acyclic fibration を保つ事を示せばよいが、fibration = acyclic cofibration に対し RLP をもつ、acyclic fibration=cofibration に対し RLP を持つものである事に注意すれば、$p : X \longrightarrow Y$ を fibration in N として、

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & GX \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Gp} \\ B & \longrightarrow & GY \end{array}$$

の可換図を M において考え、i を acyclic cofibration in M とする。この図式の adjoint を考えると、

$$\begin{array}{ccc} FA & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle Fi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ FB & \longrightarrow & Y \end{array}$$

が N においての可換図式となり、仮定から Fi が acyclic cofibration in N である。よって、p が fibration だからこの図式の lift が存在し、その adjoint が元の図式の lift となり Gp は fibration in M となる。acyclic fibration と仮定しても i を cofibration にして同じ議論ができる。

以下、3,4,5 を仮定しても今と同じように図式の lift におき返せば 1 を導く事ができる。

6 を仮定する。F は acyclic cofibration を保つのだから、今まで同様の議論から G は fibration は保つ。あとは G が acyclic fibration を保つ事を示せば、3 に結びついて 1 が示せる。今、$p : X \longrightarrow Y$ を acyclic fibration in N とする。p は fibration でもあるため Up は fibration ではある。あとは weak equivalence がいえればよい。

$Up : UX \longrightarrow UY$ に対し、Cofibrant replacement functor を施す。

$$\begin{tikzcd} QUX \arrow[r, "j"] \arrow[d, "QUp"'] & UX \arrow[d, "Up"] \\ QUY \arrow[r, "j'"'] & UY \end{tikzcd}$$

ここで、j, j' は acyclic fibration で、QUX, QUX は cofibrant である。さらに、QUp を factorization を施し、

$$\begin{tikzcd} QUX = X' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p'"'] & UX \arrow[d, "Up"] \\ Y' \arrow[r, "k"'] & UY \end{tikzcd}$$

p' を cofibration として取る事ができ、Y' はやはり cofibrant、k は acyclic fibration である。このとき、p' が weak equivalence であれば two-out-of-three から Up は weak equivalence である。この図式の adjoint をとると、

$$\begin{tikzcd} FX' \arrow[r, "j^\sharp"] \arrow[d, "Fp'"'] & X \arrow[d, "p"] \\ FY' \arrow[r, "k^\sharp"'] \arrow[ur, dotted, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

で Fp' は仮定から cofibration である。p は acyclic fibration であったから、図式の lift が存在し、それを $g : FY' \longrightarrow X$ とおく。もとにもどすと、

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p'"'] & UX \arrow[d, "Up"] \\ Y' \arrow[r, "k"'] \arrow[ur, "g^\flat"] & UY \end{tikzcd}$$

が可換である。このとき、

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "="] \arrow[d, "p'"'] & X' \arrow[d, "j"] \\ Y' \arrow[r, "g^\flat"'] \arrow[ur, dotted, "s"] & UX \end{tikzcd}$$

が可換で、p' は cofibration、j が acyclic fibration だからやはり図式の lift が存在する。よって、$s \circ p' = 1$ であり、

$$k \circ p' \circ s = Up \circ j \circ s = Up \circ g^\flat = k = k \circ 1$$

ということで、k が acyclic fibration なのだから、

$$k^* : \pi^l(Y', UY) \longrightarrow \pi^l(Y', Y')$$

は全単射で、$k^*(p' \circ s) = k^*(1)$ なのだから、$p' \circ s \overset{l}{\sim} 1$ である。Y' が cofibrant であるから、right homotopic でもあるため $p' \circ s \sim 1$ となり、$s \circ p' = 1$ ともあわせると、これは $\mathrm{Ho}(M)$ において p' は isomorphism であるため、p' は weak equivalence である。

$\square$

Remmark 0.1.3

$F : C \Longleftrightarrow D : G$ が Quillen functor ならば、各々の Total Derived functor が存在し、

$$\mathbf{L}F : \mathrm{Ho}(C) \Longleftrightarrow \mathrm{Ho}(D) : \mathbf{R}G$$

となり、さらに Quillen 同値ならば、これは equivalence of category である。

proof)　　Derived functor の章を参照。

$\square$

一番わかりやすい Quillen 同値の例は sSet と Top である。幾何学的実現 $|X_*|$ と、特異単体集合 $S_*(X)$ を思い起こしてほしい。

Theorem 0.1.4

$|-| : \mathrm{sSet} \Longleftrightarrow \mathrm{Top} : S_*$ である。

proof)　　$A_* \in \mathrm{sSet}$ と、$X \in \mathrm{Top}$ に対し、$\mathrm{Hom}_{\mathrm{sSet}}(A_*, S_*(X)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(|A_*|, X)$ を示す。

$$\alpha : \mathrm{Hom}_{\mathrm{sSet}}(A_*, S_*(X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(|A_*|, X)$$

は、weak homotopy equivalence である $\gamma : \Gamma X = |S_*(X)| \longrightarrow X$ を用いて、

$$\alpha(f_*) : |A_*| \xrightarrow{|f_*|} |S_*(X)| \xrightarrow{\gamma} X$$

により定義する。また、

$$\beta : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(|A_*|, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{sSet}}(A_*, S_*(X))$$

は、$x \in A_n, u \in \Delta^n$ に対し、$\beta(f)_n(x)(u) = f|x, u|$ で定義する。

$$\beta \circ \alpha(f_*)(x)(u) = \alpha(f_*)|x, u| = f_*(x)(u)$$

であり、$\beta \circ \alpha(f_*) = f_*$ であり、

$$\alpha \circ \beta(f)|x, u| = \beta(f)(x)(u) = f|x, t|$$

なので、$\mathrm{Hom}_{\mathrm{sSet}}(A_*, S_*(X)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(|A_*|, X)$ であり、これが natural であるのは確認してほしい。

□

Lemma 0.1.5

$|-| : \mathrm{sSet} \longrightarrow \mathrm{TOP}$ は weak equivalence と cofibration を保つ。

proof) weak equivalence を保つのは定義そのものである。cofibration に関しては、各 n に対し $f_n : X_n \longrightarrow Y_n$ が injection とすると、集合として $X_n \subset Y_n$ と考える事ができる。幾何学的実現 $|X_*|$ を思い出せば、Δ^n を X_n の濃度分だけ sX_{n-1} に貼り付けて帰納的に構成される CW 複体である。よって、$X_n \subset Y_n$ という事は、$|Y_*|$ は $|X_*|$ に胞体を接着して構成される。つまり、$(|Y_*|, |X_*|)$ は relative cell complex であり、

$$|f_*| : |X_*| \longrightarrow |Y_*|$$

はその inclusion であるので、$|f_*|$ は Top における cofibration である。

□

Corollary 0.1.6

Theorem 0.1.4 と Lemma 0.1.5 により、Prop 0.1.2 の 2 を考えれば、

$$|-| : \mathrm{sSet} \Longleftrightarrow \mathrm{Top} : S_*$$

は Quillen functors である。

Theorem 0.1.7

$|-| : \mathrm{sSet} \Longleftrightarrow \mathrm{Top} : S_*$ は Quillen 同値である。

proof)　weak equivalence が随伴によって保たれるかを見てけばよい。ここで、sSet における cofibrant object、Top における fibrant object はすべての object なのを注意する。$A_* \in \mathrm{sSet}$, $X \in \mathrm{Top}$ を取り、$f_* : A_* \longrightarrow S_*(X)$ を sSet の weak equivalence とする。このとき、

$$f_*^\flat : |A_*| \xrightarrow{|f_*|} |S_*(X)| \xrightarrow{\gamma} X$$

であり、γ は weak equivalence だったので、$f_*^\flat$ も Top における weak equivalence である。逆に $f_*^\flat$ が weak equivalence としても逆にたどれば同じ結果を得る。

□

この定理の右側は Top よりも CGH（コンパクト生成弱ハウスドルフ空間の圏）とした方が関連性がより際立つらしい。CGH の model 構造は Top の model 構造と同じなので、それほど大差ないのだが、細かいところで差異が生じてくる。CGH の model 構造については Hovey の本に詳しく載っている。